

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Кафедра технической физики и энергетики

И.И. ФАЙРУШИН

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ
НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ**

**Часть 1. Моделирование процессов в равновесной
пылевой плазме**

Методические указания для практических занятий

Казань – 2014

УДК 533.9.011(031)

ББК В22

*Принято на заседании кафедры технической физики и энергетики
Протокол № 4 от 10 ноября 2014 года*

Рецензент:

доктор технических наук,
профессор кафедры общей физики КНИТУ-КАИ им. А. Н. Туполева
Г.Ю. Даутов

Файрушин И.И.

**Математические модели низко-температурной плазмы. Часть 1.
Моделирование процессов в равновесной пылевой плазме / И.И.
Файрушин. – Казань: Казан. ун-т, 2014. –35 с.**

Низкотемпературная плазма, содержащая частицы конденсированного вещества (пылевая плазма), является уникальным объектом для исследования и находит широкие области применения во многих технологических процессах. Математическое моделирование пылевой плазмы предусматривает применение различных приближений и численных методов. В данном пособии рассмотрены в основном гидродинамическое приближение для описания равновесной пылевой плазмы.

Данное пособие адресовано студентам, обучающимся по программе магистратуры по профилю «Прикладная физика плазмы и УТС».

Оглавление

Практикум 1: Расчет состава равновесной пылевой плазмы с помощью обобщенной формулы Саха.....	4
Практикум 2: Расчет выхода электронов из пылевых частиц в приближении прямоугольного потенциального барьера у поверхности частицы.	9
Практикум 3: Расчет зависимости энергии Ферми о температуры и концентрации электронного газа.	12
Практикум 4: Аналитическое решение уравнения Пуассона-Больцмана для равновесной пылевой плазмы.	15
Практикум 5: Расчет эмиссии электронов из пылевых частиц с помощью полученного аналитического решения уравнения Пуассона-Больцмана.	20
Практикум 6: Расчет распределений потенциала и концентрации электронов в равновесной пылевой плазме содержащей полые сферические частицы.	23
Практикум 7: Численное решение уравнения Пуассона-Больцмана для равновесной пылевой плазмы в среде MathCad.....	28
Практикум 8: Аналитическое решение уравнение Пуассона-Ферми-Дирака для равновесной пылевой плазмы.	29
Основная литература:.....	35

Практикум 1: Расчет состава равновесной пылевой плазмы с помощью обобщенной формулы Саха.

Будем считать, что концентрация макрочастиц равна n_r , средняя концентрация электронов в газе или плазме равна n_e , одна макрочастица имеет заряд в единицах заряда электронов равный N , электронный газ и макрочастицы находятся в состоянии статистического равновесия. Также введем следующие обозначения: z_i и z_a – статистические суммы по электронным состояниям иона и атома, ϕ_u – потенциал однократной ионизации атома газа, q – абсолютное значение заряда электрона, n_i – концентрация ионов, n_a – концентрация атомов, h – постоянная Планка, θ – статистическая температура, равная kT , k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_e – масса электрона.

Из закона действующих масс:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{2z_i}{z_a} \left(\frac{2\pi m_e \theta}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{e_1 \phi_u}{\theta}}, \quad (1.1)$$

и баланса заряженных частиц: $n_r N + n_i = n_e$ получим

$$\frac{x_i (n_r N + x_i n)}{1 - x_i^2} = \frac{2z_i}{z_a} \left(\frac{2\pi m_e \theta}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{e_1 \phi_u}{\theta}}, \quad (1.2)$$

где $x_i = \frac{n_i}{n_a + n_i}$ – степень ионизации плазмы, $n = n_e + n_i + n_a$ – общая концентрация электронов ионов и нейтральных атомов плазмы.

Таким образом, (1.2) является обобщением формулы Саха, учитывающим влияние макрочастиц на степень ионизации плазмы.

Условие статистического равновесия электронного газа в пылевой плазме выражается следующим уравнением

$$\mu_1 + e\phi_1 = \mu + e\phi, \quad (1.3)$$

где μ_1 - энергия Ферми для электрона внутри макрочастицы и μ - энергия Ферми для электрона вне макрочастицы, ϕ_1 и ϕ - потенциалы электрического поля внутри и вне макрочастицы, e - заряд электрона. Будем считать, что $\phi = 0$ и внутри макрочастицы $\phi_1 = \text{const}$, $|e| = q$. С учетом этого уравнение (1.3) запишем в виде

$$\mu_1 - \mu = q\phi_1. \quad (1.4)$$

Потенциальная энергия электрона внутри макрочастицы, заряд которой равен Nq , определяется известным уравнением

$$W_n = -q\phi_1 = -\frac{q^2 N}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}, \quad (1.5)$$

где ϵ - относительная диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 - электрическая постоянная.

Концентрация свободных электронов в газе или плазме обычно мала и поэтому в качестве μ нужно использовать энергию Ферми невырожденного электронного газа

$$\mu = \theta \ln(an_e), \quad a = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_e \theta} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (1.6)$$

Здесь h - постоянная Планка, θ - статистическая температура, равная kT , k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, m_e - масса электрона.

В зависимости от концентрации электронов в макрочастицах и температуры возможны два случая. При больших n_{e0} и малых T электронный газ в макрочастицах является вырожденным, а при малых n_{e0} и больших T невырожденным. Рассмотрим более подробно последний случай, тогда энергия Ферми электронного газа в макрочастицах определяется формулой

$$\mu_1 = \theta \ln(an_{e1}), \quad (1.7)$$

где n_{e1} - концентрация электронов в макрочастицах после эмиссии.

Подстановка выражений (1.5), (1.6) и (1.7) в (1.4) дает

$$\theta \ln \frac{n_{e1}}{n_e} = bN, \quad b = \frac{q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}.$$

$$\frac{n_r N + n_i}{n_{e0} - \frac{N}{V}} = e^{-\frac{bN}{\theta}} \quad (1.8)$$

С помощью уравнений (1.3) и (1.8) можно провести расчет концентрации электронов и ионов в пылевой плазме в зависимости от радиуса пылевых частиц, их концентрации и температуры плазмы. Результаты расчетов представлены на рис. 1.1-1.6. Здесь принято, что полная объемная доля всех пылевых частиц величина постоянная и составляет 4% от объема всей плазмы, $n_{e0} = 10^{19} \text{ м}^{-3}$, давление газа равно 10^5 Па , $\phi_u = 4,3 \text{ эВ}$, что соответствует аргону.

Как видно, из этих рисунков концентрация электронов плазмы при температуре равной 1000 К и 1500 К с увеличением радиуса пылинок уменьшается. Данное явление можно объяснить, тем, что выход электронов сильно зависит от радиуса пылевых частиц, более мелкие частицы эффективнее эмитируют и поглощают электроны. Так как, электронов вышедших из пылинок в плазму с ростом R становится меньше, то, как и следовало ожидать, наблюдается рост концентрации ионов, связанный со снижением интенсивности их рекомбинации с электронами (рис. 1.2 и 1.4).

Иной характер зависимости наблюдается при температуре 2000 К . Это объясняется тем, что при более высокой температуре концентрация собственных электронов плазмы, образующихся в процессе ионизации газа, становится больше, чем начальная концентрация электронов в пылинках. Пылевые частицы с увеличением радиуса меньше захватывают электроны, поэтому концентрация ионов в плазме уменьшается (рис. 1.5-1.6). При меньших значениях радиуса пылинок больше электронов из плазмы заходит внутрь пылевых частиц, следовательно, концентрация ионов увеличивается.

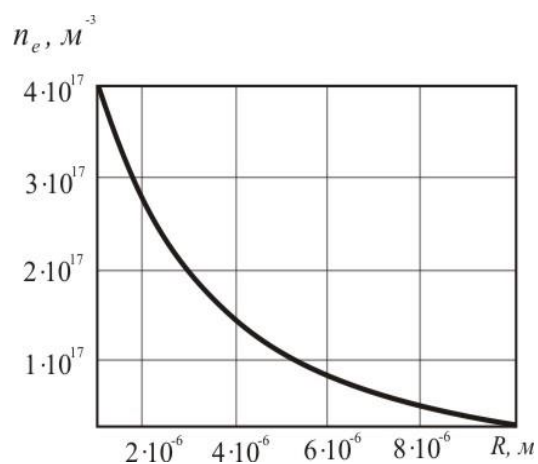


Рис. 1.1 Зависимость концентрации электронов плазмы от радиуса макрочастиц при $T=1000$ К.

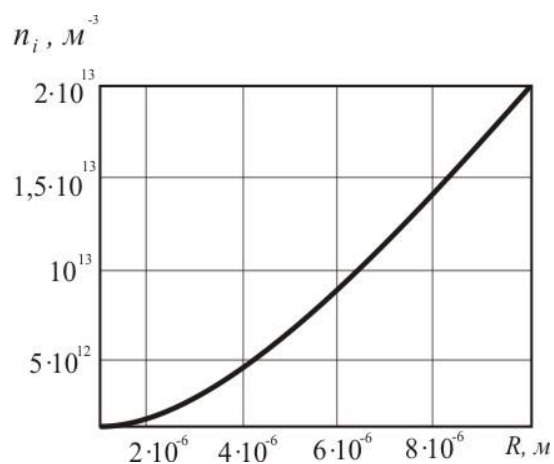


Рис. 1.2. Зависимость концентрации ионов плазмы от радиуса макрочастиц при $T=1000$ К.

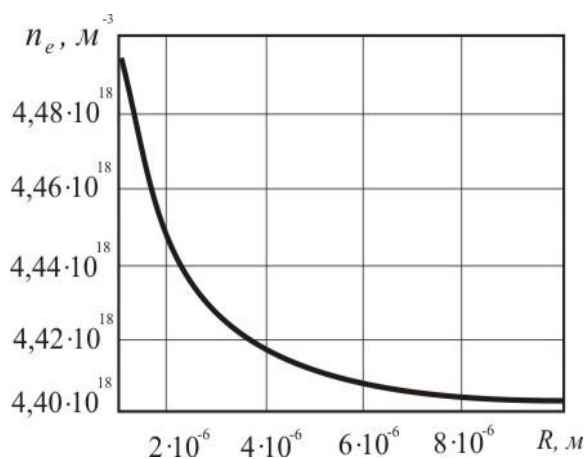


Рис. 1.3. Зависимость концентрации электронов плазмы от радиуса макрочастиц при $T=1500$ К.

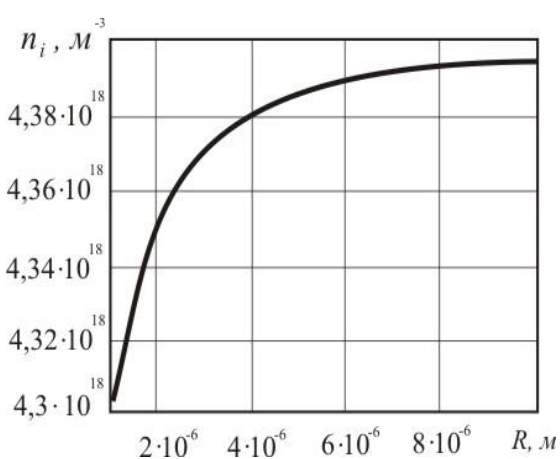


Рис. 1.4. Зависимость концентрации ионов плазмы от радиуса макрочастиц при $T=1500$ К.

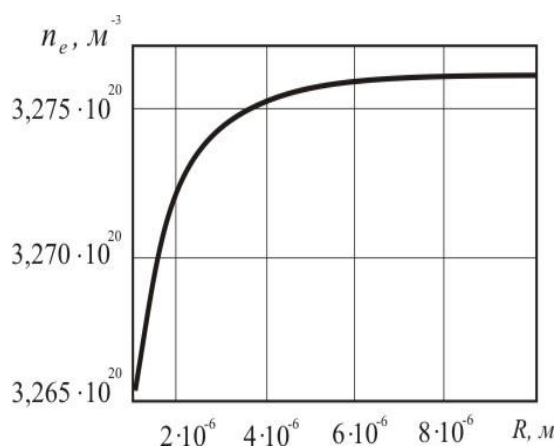


Рис. 1.5. Зависимость концентрации электронов плазмы от радиуса макрочастиц при $T=2000$ К.

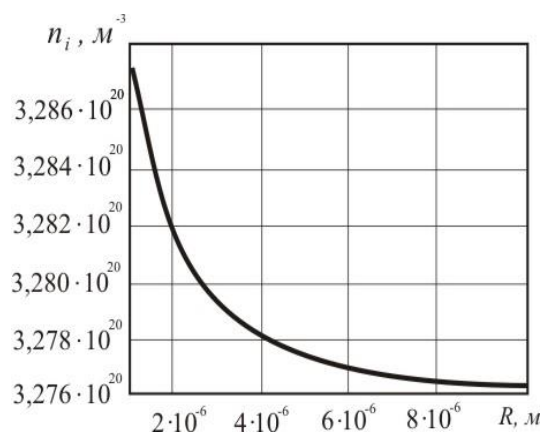


Рис. 1.6. Зависимость концентрации ионов плазмы от радиуса макрочастиц при $T=2000$ К.

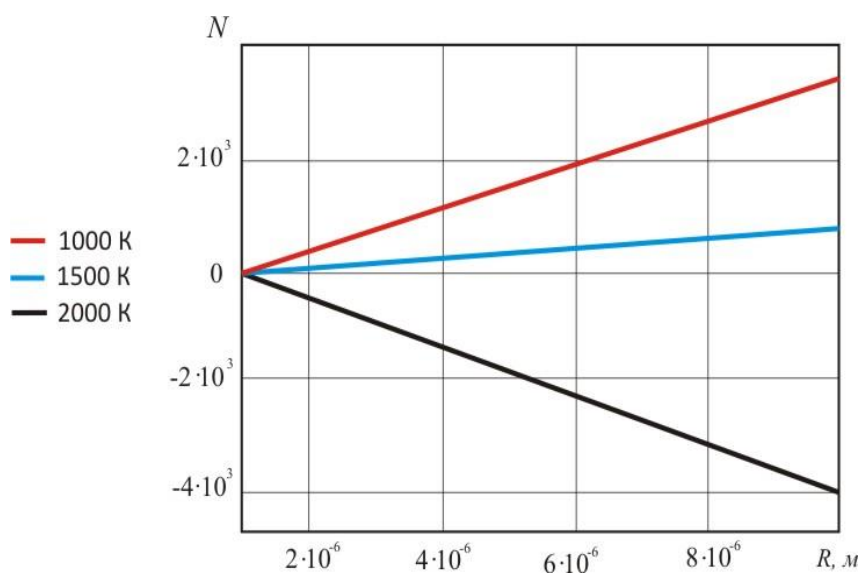


Рис. 1.7. Зависимость заряда пылевых частиц от их радиуса в единицах заряда электрона при различных температурах плазмы

Из рис. 1.7 видно, что заряд пылевых частиц в абсолютном выражении линейно уменьшается в зависимости от их радиуса. Таким образом, удельный заряд частиц с уменьшением R будет расти, что и подтверждает сделанное выше предположение о росте эффективности испускания или поглощения электронов с уменьшением размеров пылинок.

Практикум 2: Расчет выхода электронов из пылевых частиц в приближении прямоугольного потенциального барьера у поверхности частицы.

Условием равновесия электронного газа является уравнение

$$\mu_1 + e\phi_1 = \mu + e\phi, \quad (2.1)$$

где μ_1 - энергия Ферми для электрона внутри макрочастицы и μ - энергия Ферми для электрона вне макрочастицы, ϕ_1 и ϕ - потенциалы электрического поля внутри и вне макрочастицы, e - заряд электрона. Будем считать, что $\phi = 0$ и внутри макрочастицы $\phi_1 = \text{const}$, $|e| = q$. С учетом этого уравнение (2.1) запишем в виде

$$\mu_1 - \mu = q\phi_1. \quad (2.2)$$

Потенциальная энергия электрона внутри макрочастицы, заряд которой равен Nq , определяется известным уравнением

$$W_n = -q\phi_1 = -\frac{q^2 N}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}, \quad (2.3)$$

где ϵ - относительная диэлектрическая проницаемость, ϵ_0 - электрическая постоянная.

Концентрация свободных электронов в газе или плазме обычно мала и поэтому в качестве μ нужно использовать энергию Ферми невырожденного электронного газа

$$\mu = \theta \ln(an_e), \quad a = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_e \theta} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.4)$$

Здесь h - постоянная Планка, θ - статистическая температура, равная kT , k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура, m_e - масса электрона.

В зависимости от концентрации электронов в макрочастицах и температуры возможны два случая. При больших n_{e0} и малых T электронный газ в макрочастицах является вырожденным, а при малых n_{e0} и больших T

невырожденным. Рассмотрим более подробно последний случай. Энергия Ферми электронного газа в макрочастицах определяется формулой

$$\mu_1 = \theta \ln(an_{e1}), \quad (2.5)$$

где n_{e1} - концентрация электронов в макрочастицах после эмиссии.

Подстановка выражений (2.3), (2.4) и (2.5) в (2.2) дает

$$\theta \ln \frac{n_{e1}}{n_e} = bN, \quad b = \frac{q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R} \quad (2.6)$$

При низких температурах термическая ионизация газа отсутствует, т.е. $n_i = 0$ и

$$n_r N = n_e \quad (2.7)$$

Из (2.6) находим

$$\frac{n_{e1}}{n_e} = e^{\frac{bN}{\theta}} \quad (2.8)$$

С учетом (2.7) из (2.8) получится

$$\frac{n_r N}{n_{e0} - \frac{N}{V}} = e^{\frac{bN}{\theta}} \quad (2.9)$$

(2.9) является уравнением, определяющим зависимость N от n_{e0} , R , T и n_r , где V -

объем одной макрочастицы. Если $n_{e0} \gg \frac{N}{V}$, в приближенных расчетах в

знаменателе можно пренебречь величиной $\frac{N}{V}$ по сравнению с n_{e0} . Тогда

получается следующая упрощенная формула

$$N = \frac{n_{e0}}{n_r} e^{-\frac{bN}{\theta}} \quad (2.10)$$

С ростом R величина b уменьшается, следовательно, N растет. Как видно из (2.10), с повышением температуры N также растет. При $n_r \cdot R^3 = \text{const}$ объем макрочастиц в единице объема плазмы остается постоянным. На рис. 2.1 показана зависимость n_e от R при $\varepsilon=1$, $n_{e0}=10^{19} \text{ м}^{-3}$, $n_r \cdot R^3 = \text{const}$ и различных значениях температуры (кривая 1 – $T=1000 \text{ К}$, кривая 2 – $T=1500 \text{ К}$, кривая 3 – $T=2000 \text{ К}$). Как видно, уменьшение R и увеличение T приводит к повышению концентрации электронов в пылевой плазме.

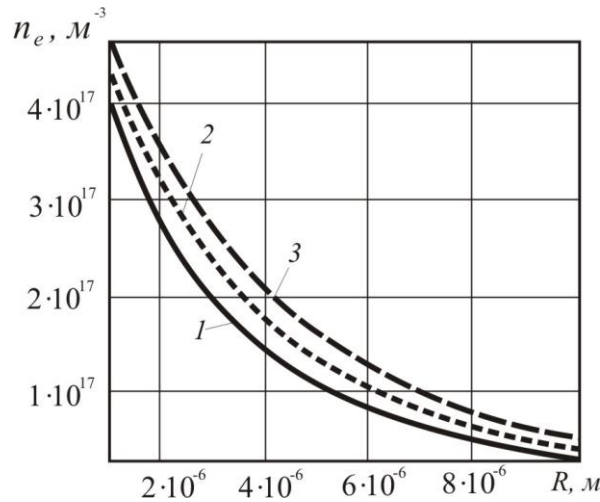


Рис. 2.1.

Рассмотрим теперь более подробно случай когда электронный газ внутри макрочастицы вырожден. Энергия Ферми вырожденного электронного газа в макрочастицах определяется формулой

$$\mu_1 = \frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3n_{e1}}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.11)$$

где n_{e1} - концентрация электронов в макрочастицах после эмиссии. Тогда получаем

$$\frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3n_{e1}}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} - \theta \ln(an_e) = bN, \quad b = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \quad (2.12)$$

Т.к. термическая ионизация газа отсутствует, то

$$n_r N = n_e. \quad (2.13)$$

С учетом (2.13) из (2.12) для N получается уравнение

$$\frac{h^2}{2m_e} \left(\frac{3 \left(n_{e0} - \frac{3N}{4\pi R^3} \right)}{8\pi} \right)^{\frac{2}{3}} - \theta \ln(an_r N) = bN$$

Практикум 3: Расчет зависимости энергии Ферми от температуры и концентрации электронного газа.

Энергия Ферми электронного газа определяется из условия нормировки

$$n = \int_0^{\infty} dn(\varepsilon) = \int_0^{\infty} \frac{4\pi(2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2}}{h^3 \{1 + \exp[(\varepsilon - \mu)/kT]\}} d\varepsilon. \quad (3.1)$$

При $\theta = 0$ получается

$$n = \int_0^{\mu_0} \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2}{3} \cdot 4\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \mu_0^{3/2},$$

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}, \quad (3.2)$$

где μ_0 - энергия Ферми вырожденного электронного газа.

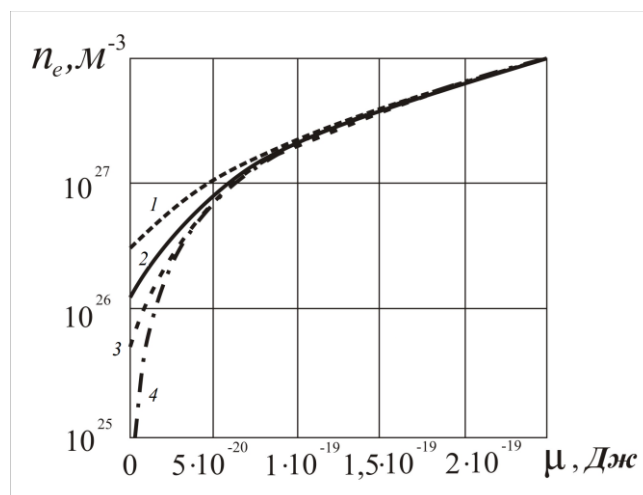


Рис. 3.1. Зависимость энергии Ферми от концентрации:

1 при $T=1000$ К, 2 при $T=2000$ К, 3 при $T=500$ К, 4 - расчет по формуле (3.2)

На рис.3.1 показаны результаты расчета зависимости энергии Ферми от концентрации электронов при различных температурах.

Энергия Ферми для невырожденного электронного газа определяется из уравнения

$$\exp[\mu / kT] = \frac{n}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{\frac{3}{2}},$$

Отсюда следует известное выражение

$$\mu = kT \cdot \ln \frac{n}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi m kT} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (3.3)$$

На рис.3.2 и 3.3 показаны зависимости энергии Ферми от концентрации электронов при различных температурах, где $\varphi(\mu)$ - расчет энергии Ферми для невырожденного электронного газа по упрощенной формуле (3.17); $\psi(\mu)$ и $\chi(\mu)$ - расчеты по общей формуле (3.1)

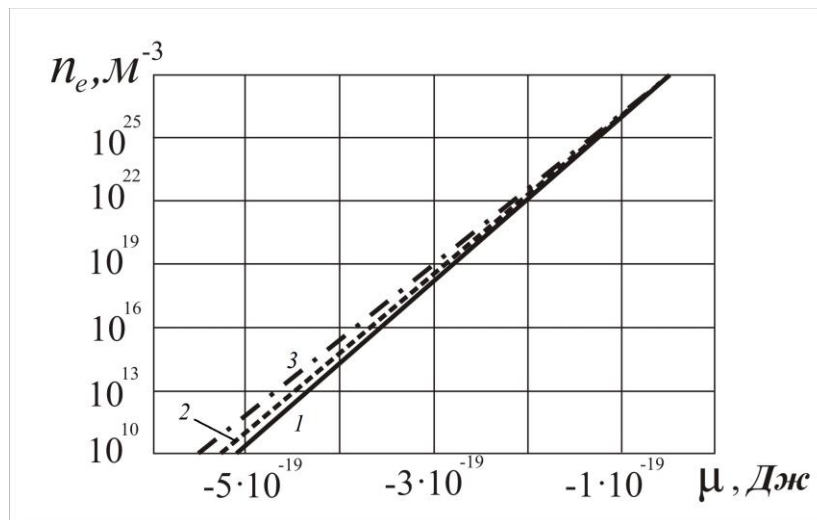


Рис. 3.2. Зависимость энергии Ферми от концентрации:

1 при $T=1000$ К, 2 при $T=1025$ К, 3 при $T=1050$ К.

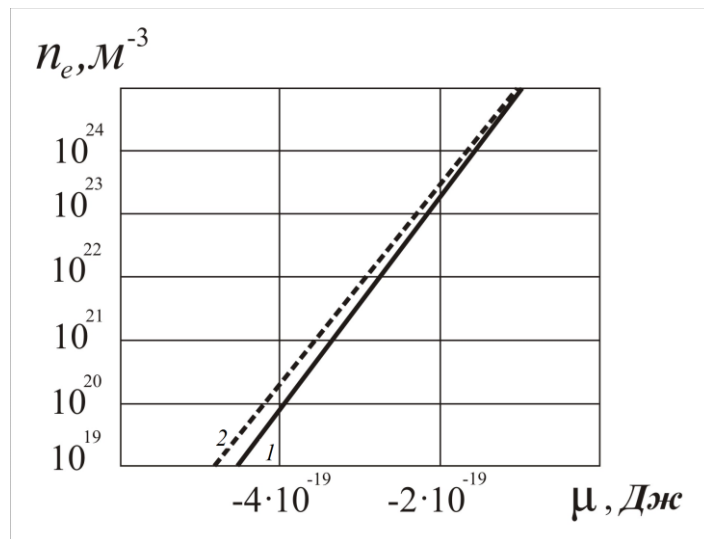


Рис. 5.3. Зависимость энергии Ферми от концентрации:

1 при $T=2000$ К, 2 при $T=2050$ К.

(2 - расчет энергии Ферми для невырожденного электронного газа по упрощенной формуле (5.4))

Практикум 4: Аналитическое решение уравнения Пуассона-Больцмана для равновесной пылевой плазмы.

Уравнение Пуассона – Больцмана

$$\Delta\varphi = \frac{n_{e0}e^{\frac{q\varphi}{\theta}} - n_i}{\varepsilon_0\varepsilon_1} q. \quad (4.1)$$

Имея решение этого уравнения, можно определить и распределение концентрации электронов. Рассмотрим простейшую задачу, когда пылевыми частицами являются одинаковые шарики, концентрация которых постоянна в пространстве.

В случае сферической симметрии уравнение (4.1) записывается так

$$\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \left(n_{e0}e^{\frac{q\varphi}{\theta}} - n_i \right) q.$$

Отсюда введением безразмерных величин $\frac{r}{R} = x$, $\frac{q\varphi}{kT} = \phi$, $\frac{n_i}{n_{e0}} = \bar{n}_i$ получим

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi}{dx} \right) - b^2 \left(e^{\phi} - \bar{n}_i \right) = 0, \quad b^2 = \frac{q^2 R^2 n_{e0}}{kT\varepsilon_1\varepsilon_0}. \quad (4.2)$$

Здесь R - радиус пылевой частицы n_{e0} - концентрация электронов в центре сферы, $n_i = const$ в области $0 \leq x \leq 1$ и $n_i = 0$ в области $x > 1$. Особенность этого уравнения заключается в том, что здесь n_i является неизвестной величиной. Часть электронов из пылевой частицы выходит и поэтому $n_i > n_{e0}$.

Уравнение (11) решается при условиях

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi'(\lambda) = 0,$$

где $\lambda = l/R$, $2l$ – расстояние между центрами двух соседних пылевых частиц. Последнее граничное условие означает равенство нулю полного электрического заряда в объеме, ограниченной сферой радиусом l и используется для определения значения n_i .

В случае $|\phi| \ll 1$ величину e^ϕ можно разложить в ряд и ограничиться первыми двумя членами $e^\phi = 1 + \phi$. С учетом этого выражения уравнение (4.2) принимает вид

$$\frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\phi_1}{dx} \right) = a^2 (1 + \phi_1 - \bar{n}_i).$$

Если ввести функции $xu = W$, $1 + \phi - \bar{n}_i = y$, это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2 W}{dx^2} - a^2 W = 0. \quad (4.3)$$

Общим решением этого уравнения является

$$W = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}.$$

Отсюда находим

$$\phi_1(x) = \bar{n}_i - 1 + \frac{C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}}{x}. \quad (4.4)$$

Выберем C_1 и C_2 с учетом условия

$$\phi_1(0) = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.4) видно, что величина $\phi_1(0)$ будет ограниченной только тогда, когда функция

$$y(x) = \frac{C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}}{x}$$

в точке $x=0$ будет представлять неопределенность вида $0:0$.

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} = C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 = -C_2.$$

Найдем значение $\phi_1(x)$ при $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi_1(x) = \bar{n}_i - 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 (e^{ax} - e^{-ax})}{x} = \bar{n}_i - 1 + 2C_1 a$$

Отсюда и из условия (4.5) находим

$$\overline{n_i} = 1 - 2C_1 a . \quad (4.6)$$

Таким образом,

$$\phi_1(x) = C_1 \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x} - 2a \right) . \quad (4.7)$$

Введем величину $\lambda = \frac{l}{R}$, где $2l$ -расстояние между двумя соседними

частицами. В области $1 \leq x \leq \lambda$ ионы отсутствуют: $\overline{n_i} = 0$.

Тогда формула (4.4) для случая $1 \leq x \leq \lambda$ имеет вид.

$$\phi_2(x) = -1 + \frac{D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax}}{x} . \quad (4.8)$$

Отсюда следует

$$\phi_2'(x) = \frac{(D_1 a e^{ax} - D_2 a e^{-ax})x - (D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax})}{x^2} . \quad (4.9)$$

Одним из граничных условий для $\phi_2(x)$ является

$$\phi_2'(\lambda) = 0 , \quad (4.10)$$

Из (12), (13) находим

$$\begin{aligned} \phi_2'(\lambda) &= \frac{(D_1 a e^{a\lambda} - D_2 a e^{-a\lambda})\lambda - (D_1 e^{a\lambda} + D_2 e^{-a\lambda})}{\lambda^2} , \\ D_2 &= D_1 \frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} e^{2a\lambda} . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Таким образом, распределение безразмерного потенциала в этой области описывается формулой

$$\phi_2(x) = -1 + D_1 \frac{e^{ax} + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - x)}}{x} . \quad (4.12)$$

При $x=1$ должны выполняться граничные условия:

$$\phi_1(1) = \phi_2(1), \quad \phi_1'(1) = \phi_2'(1). \quad (4.13)$$

Из (4.12) и (4.13) находим

$$\phi_1(1) = C_1(e^a - e^{-a} - 2a), \phi_2(1) = -1 + D_1\left(e^a + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right)e^{a(2\lambda-1)}\right),$$

$$\phi_1'(1) = C_1[e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)], \phi_2'(1) = D_1\left(e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right)e^{a(2\lambda-1)}(a+1)\right), \quad (4.14)$$

$$C_1 = \frac{D_1\left(e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right)e^{a(2\lambda-1)}(a+1)\right)}{[e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)]},$$

$$D_1 = \frac{e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)}{2a\left(e^a(a-1) - (a+1)\left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right)e^{a(2\lambda-1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right)e^{2a\lambda}\right)}, \quad (4.15)$$

$$C_1 = \frac{e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right)e^{a(2\lambda-1)}(a+1)}{2a\left(e^a(a-1) - (a+1)\left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right)e^{a(2\lambda-1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1}\right)e^{2a\lambda}\right)}. \quad (4.16)$$

Используя формулу Больцмана, можно записать формулу для распределения концентрации электронов

$$n_e = n_{e0} \exp\left[C_1\left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x} - 2a\right)\right], \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.17)$$

$$n_e = n_{e0} \exp \left[-1 + D_1 \frac{e^{ax} + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - x)}}{x} \right], \quad 1 \leq x \leq \lambda, \quad (4.18)$$

где D_1 и C_1 определяются из (18) и (19) соответственно.

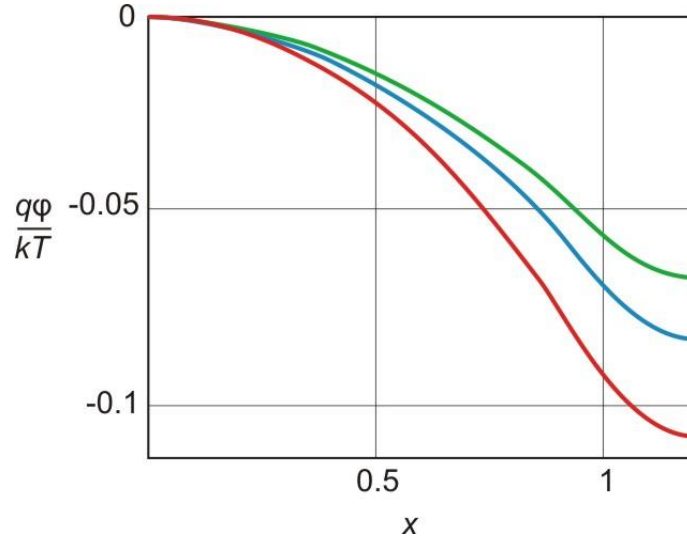


Рис. 4.1. Распределение безразмерного потенциала при $R = 10^{-6}$ м, $n_i = 10^{19}$ м⁻³ и различных температурах (1500 K – красная линия, 2000 K – синяя линия, 2500 K – зеленая линия)

Поскольку потенциал и концентрация электронов непосредственно связаны формулой Больцмана, с ростом x в области $x \approx 1$ величина n_e резко уменьшается. С удалением от частицы скорость изменения n_e снижается и в

точке $x = \lambda$ выполняется условие $\frac{dn_e}{dx} = 0$ (рис. 4.2).

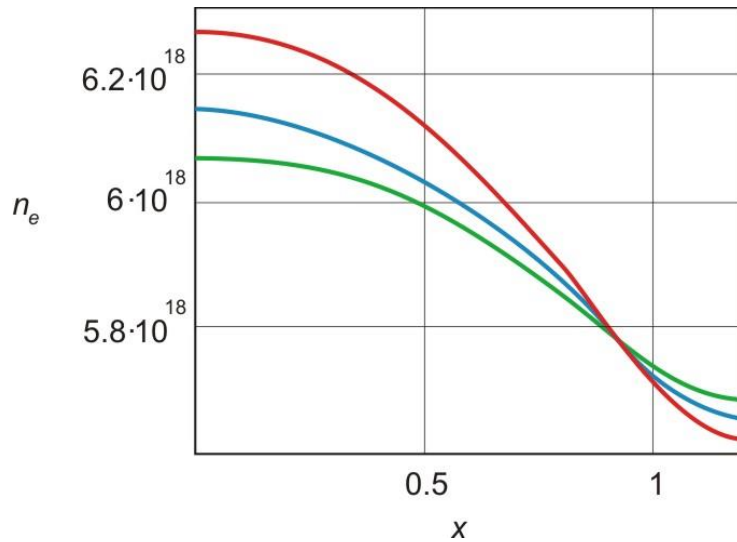


Рис. 4.2. Распределение концентрации электронов при $R = 10^{-6} \text{ м}$, $n_i = 10^{19} \text{ м}^{-3}$ и различных температурах (1500 K – красная линия, 2000 K – синяя линия, 2500 K – зеленая линия).

Практикум 5: Расчет эмиссии электронов из пылевых частиц с помощью полученного аналитического решения уравнения Пуассона-Больцмана.

Из вышеприведенных формул видно, что распределение безразмерной концентрации электронов и безразмерного потенциала являются функциями безразмерных величин a, λ, x , т.е.

$$\phi_1 = f_1(a, \lambda, x), \phi_2 = f_2(a, \lambda, x), \overline{n_e} = \frac{n_e}{n_{e0}} = f_3(a, \lambda, x). \quad (5.1)$$

Таким образом, величины

$$a = R \cdot q \sqrt{\frac{n_{e0}}{kT\epsilon\epsilon_0}}, \quad \lambda = \frac{l}{R} \quad (5.2)$$

являются критериями подобия для данной задачи. Следовательно, при $a = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$ обобщенные распределения $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\overline{n_e}(x)$ совпадают.

Рассчитаем количество электронов, вышедших за пределы частицы. Запишем теорему Гаусса для частицы с радиусом R

$$E \cdot 4\pi \cdot R^2 = \frac{N_e \cdot q}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon},$$

где N_e количество электронов, вышедших за пределы частицы.

Отсюда получим

$$N_e = \frac{-4\pi \cdot R \cdot \varepsilon_0 \cdot k \cdot T}{q^2} \phi_1'(1), \quad (5.3)$$

где $\phi_1'(1)$ определяется по формуле (4.7). Т.е. получаем

$$\phi_1'(1) = \frac{\left(e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{a(2\lambda-1)}(a+1) \right) \left[e^a(a-1) + e^{-a}(a+1) \right]}{2a \left(e^a(a-1) - (a+1) \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{a(2\lambda-1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda-1}{a\lambda+1} \right) e^{2a\lambda} \right)} \quad (5.4)$$

Из рисунков 5.1-5.3 видно, что при указанных параметрах частица испускает порядка $10^4 - 10^5$ электронов. Это говорит о высокой эффективности использования твердых частиц с целью повышения электропроводности плазмы при низких температурах.

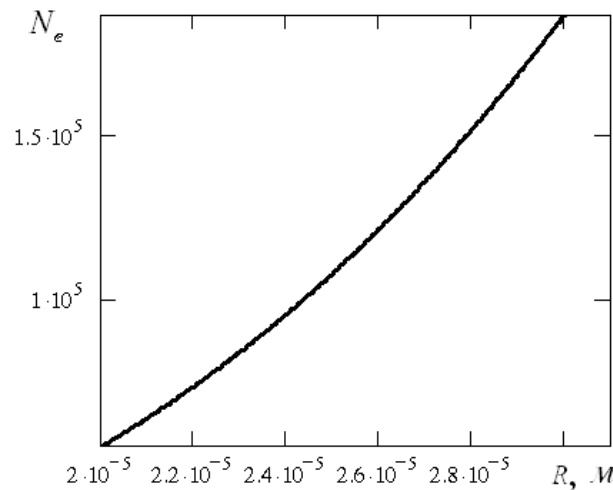


Рис. 5.1. Зависимость количества электронов, вышедших за пределы частицы, от радиуса частицы при $T = 1000 \text{ K}$, $n_{e0} = 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

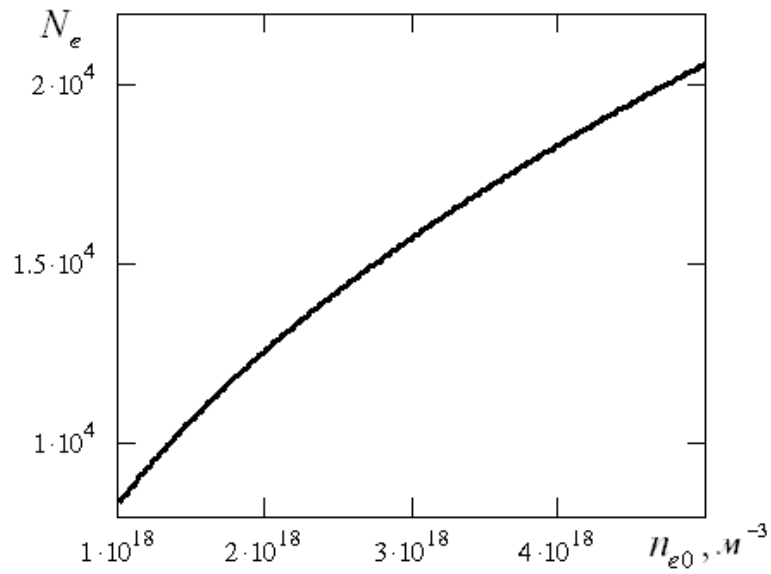


Рис. 5.2. Зависимость количества электронов, вышедших за пределы частицы, от начальной концентрации электронов при $R = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $T = 1000 \text{ К}$.

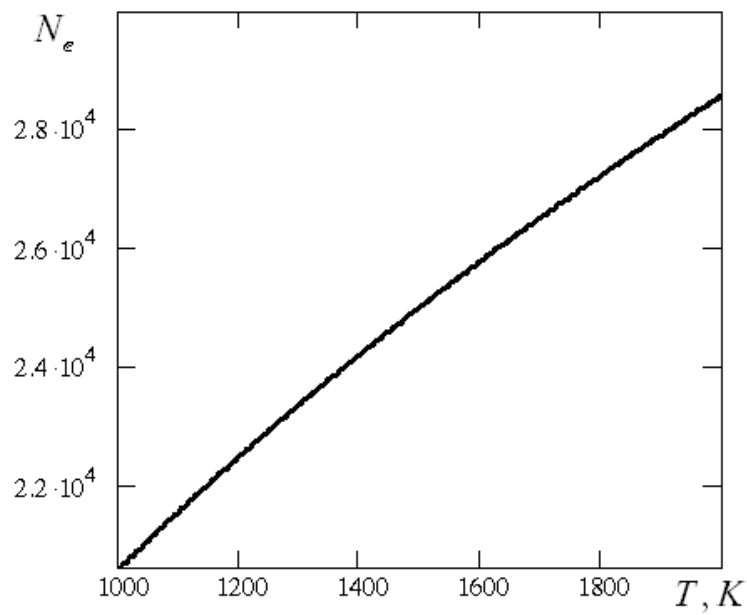


Рис. 5.3. Зависимость количества электронов, вышедших за пределы частицы, от абсолютной температуры при $R = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $n_{e0} = 10^{18} \text{ м}^{-3}$.

Практикум 6: Расчет распределений потенциала и концентрации электронов в равновесной пылевой плазме содержащей полые сферические частицы.

Пусть расстояние между центрами двух соседних частиц радиуса R равно $2l$, R_1 –радиус полости частицы, а r –текущая координата, отсчитываемая от центра частицы (рис. 6.1).

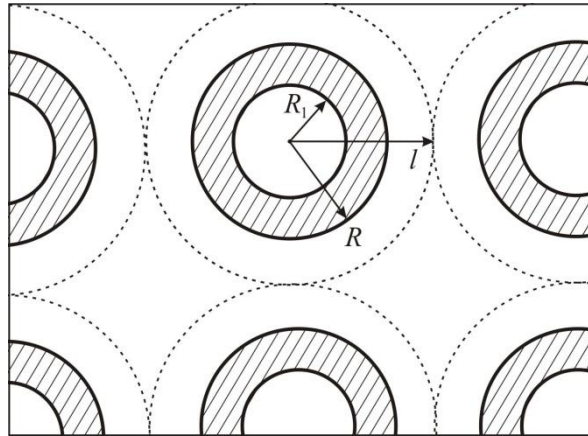


Рис. 6.1.

Найдем распределения потенциала $\varphi(r)$ и концентрации электронов $n_e(r)$ в области $0 \leq r \leq l$ при следующих условиях:

$$n_i(r) = \begin{cases} 0, & \text{при } r < R_1 \text{ и } r > R \\ \text{const}, & \text{при } R_1 \leq r \leq R \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\varphi(0)=0, \varphi'(0)=0. \quad (6.2)$$

Для этого случая полученное точное решение записывается в виде

$$\psi = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2ax} - 1, \text{ при } 0 \leq x < x_1 \quad (6.3)$$

$$\psi = \bar{n}_i - 1 + \frac{C_3 e^{ax} - C_4 e^{-ax}}{x}, \text{ при } x_1 \leq x \leq 1 \quad (6.4)$$

$$\psi = \frac{C_5 e^{ax} - C_6 e^{-ax}}{x} - 1, \text{ при } 1 < x \leq \lambda \quad (6.5)$$

Здесь

$$x_1 = \frac{R_1}{R}, \quad \lambda = \frac{R}{l} \quad (6.6)$$

$$C_3 = \frac{1 - \bar{n}_i e^{-ax_1} (1 + ax_1)}{2a} \quad (6.7)$$

$$C_4 = \frac{\bar{n}_i e^{ax_1} (1 - ax_1) - 1}{2a} \quad (6.8)$$

$$C_5 = \frac{1 - \bar{n}_i e^{-ax_1} (1 + ax_1) + (a + 1) \bar{n}_i e^{-a}}{2a} \quad (6.9)$$

$$C_6 = \frac{\bar{n}_i e^{ax_1} (1 - ax_1) - 1 + (a - 1) \bar{n}_i e^a}{2a} \quad (6.10)$$

$$\bar{n}_i = \frac{e^{-2a\lambda} (a\lambda + 1) + a\lambda - 1}{e^{-2a\lambda} (a\lambda + 1) (e^{ax_1} (1 - ax_1) + e^a (a - 1)) + (a\lambda - 1) (e^{-ax_1} (ax_1 + 1) + e^{-a} (a + 1))} \quad (15)$$

Из (6.3)-(6.10) с учетом распределения Больцмана можно получить формулы для расчета распределения концентрации электронов:

$$n_e = n_{e0} \exp \left[\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2ax} - 1 \right], \quad \text{при } 0 \leq x < x_1 \quad (6.11)$$

$$n_e = n_{e0} \exp \left[\bar{n}_i - 1 + \frac{C_3 e^{ax} - C_4 e^{-ax}}{x} \right], \quad \text{при } x_1 \leq x \leq 1 \quad (6.12)$$

$$n_e = n_{e0} \exp \left[\frac{C_5 e^{ax} - C_6 e^{-ax}}{x} - 1 \right], \quad \text{при } 1 < x \leq \lambda \quad (6.13)$$

Из выше приведенных формул видно, что распределения безразмерной концентрации электронов $\bar{n}_e = \frac{n_e}{n_{e0}}$ и безразмерного потенциала ψ являются

функциями безразмерных величин a, λ, x, x_1 , т.е.

$$\psi = f_1(a, \lambda, \lambda_1, x), \quad \bar{n}_e = f_2(a, \lambda, \lambda_1, x)$$

Таким образом, величины

$$a = qR \sqrt{\frac{n_{e0}}{kT\epsilon\epsilon_0}}, \quad \lambda = \frac{l}{R}, \quad x_1 = \frac{R_1}{R}, \quad x = \frac{r}{R}$$

являются собственными значениями этих функций, а также критериями подобия для данной задачи. Следовательно, при $a=\text{const}, \lambda=\text{const}, x_1=\text{const}$ обобщенные распределения и $\psi(x)$, и $\bar{n}_e(x)$ совпадают.

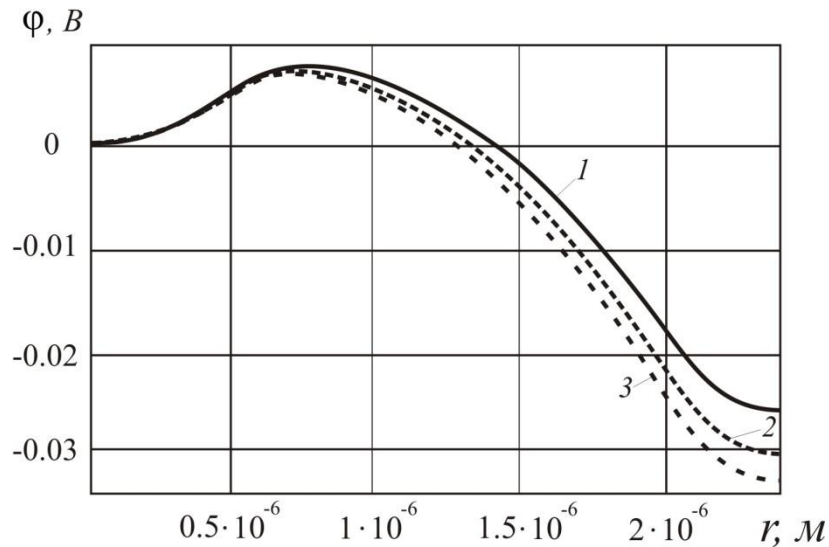


Рис.6.2. Распределение потенциала для различных температур в области $0 \leq r \leq l$ при $n_i=10^{19} \text{ м}^{-3}$, $R_i=5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $R=2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $l=2,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ (1 – для $T=1000 \text{ К}$, 2 – для $T=1500 \text{ К}$ и 3 – для $T=2000 \text{ К}$).

Как видно из рис. 6.2, внутри полости частицы с ростом r потенциал медленно увеличивается. Затем, при приближении к внутренней поверхности рост потенциала происходит быстрее, что объясняется большим значением градиента концентрации электронов. В области $R_i \leq r \leq R$ потенциал медленно увеличивается, достигает максимального значения и начинает уменьшаться. Вблизи внешней поверхности уменьшение потенциала с ростом r происходит наиболее быстро. Соответственно возникает большая напряженность электрического поля. Из (6.4) можно найти формулу для расчета напряженности на внешней поверхности полый микрочастицы, т.е. в точке $r=R$

$$E(R) = -\frac{kT}{qR} \psi'_x(1) \quad (6.14)$$

Расчет по этой формуле при $T=1000$ К, $n_i=10^{19}\text{м}^{-3}$, $R_I=5\cdot 10^{-7}\text{м}$, $R=2\cdot 10^{-6}\text{м}$, $l=2,4\cdot 10^{-6}\text{м}$ даёт $E(R)=4,2\cdot 10^4\text{В/м}$. В области $R < r \leq l$ с ростом r потенциал сначала быстро, затем медленно уменьшается до значения $\varphi(l)$.

Расчеты показали, что при больших l условие $|\psi| \ll 1$ не выполняется. В этом случае уравнение (6.2) решалось численно методом Рунге-Кутты.

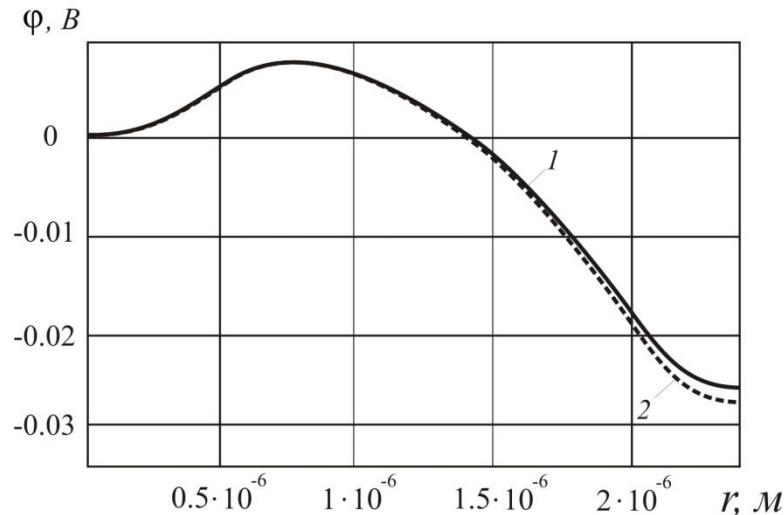


Рис. 6.3. Распределение потенциала в области $0 \leq r \leq l$ при $n_i=10^{19}\text{м}^{-3}$, $R_I=5\cdot 10^{-7}\text{м}$, $R=2\cdot 10^{-6}\text{м}$, $l=2,4\cdot 10^{-6}\text{м}$ и $T=1000$ К (1 – результат аналитического решения, 2 – результат численного решения).

На рис. 6. 3 график 1 построен по формулам (6.3) –(6.5), а график 2 построен путем численного решения дифференциального уравнения (6.2). Как видно из сравнения этих графиков, линеаризация уравнения (6.2) приводит к завышению потенциала при больших r .

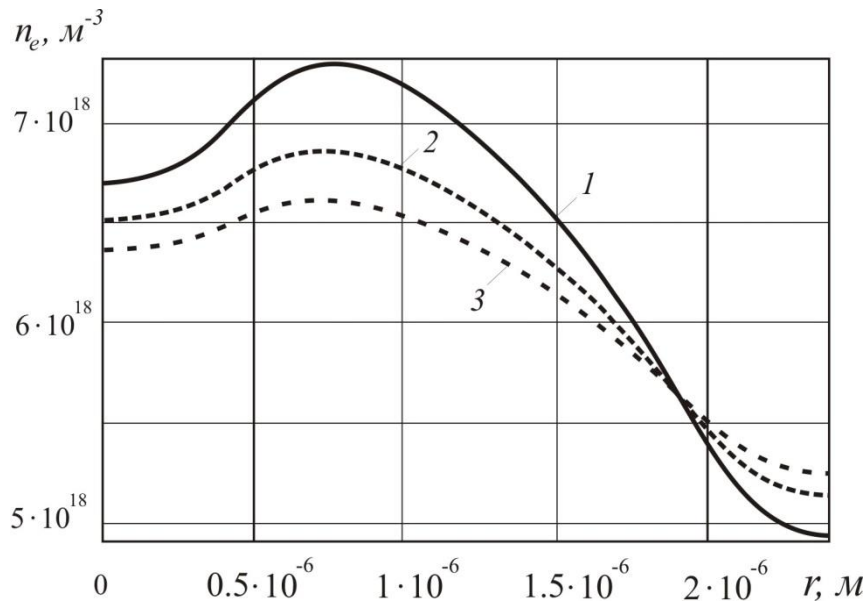


Рис.6.4. Распределение концентрации электронов для различных температур в области $0 \leq r \leq l$ при $n_i = 10^{19} \text{ м}^{-3}$, $R_I = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$, $R = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$, $l = 2,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ (1 - для $T = 1000 \text{ К}$, 2 - для $T = 1500 \text{ К}$ и 3 - для $T = 2000 \text{ К}$).

На рис. 6.4 представлены результаты расчетов распределения концентрации электронов по формулам (6.11)-(6.13). С ростом r в области $r \approx R$ величина n_e резко уменьшается. С удалением от частицы скорость изменения n_e уменьшается и в точке $r = l$ выполняется условие

$$\frac{dn_e}{dr} = 0.$$

Практикум 7: Численное решение уравнения Пуассона-Больцмана для равновесной пылевой плазмы в среде MathCad.

На рис. 7.1 приведен листинг алгоритма численного решения уравнения Пуассона-Больцмана в среде MathCad.

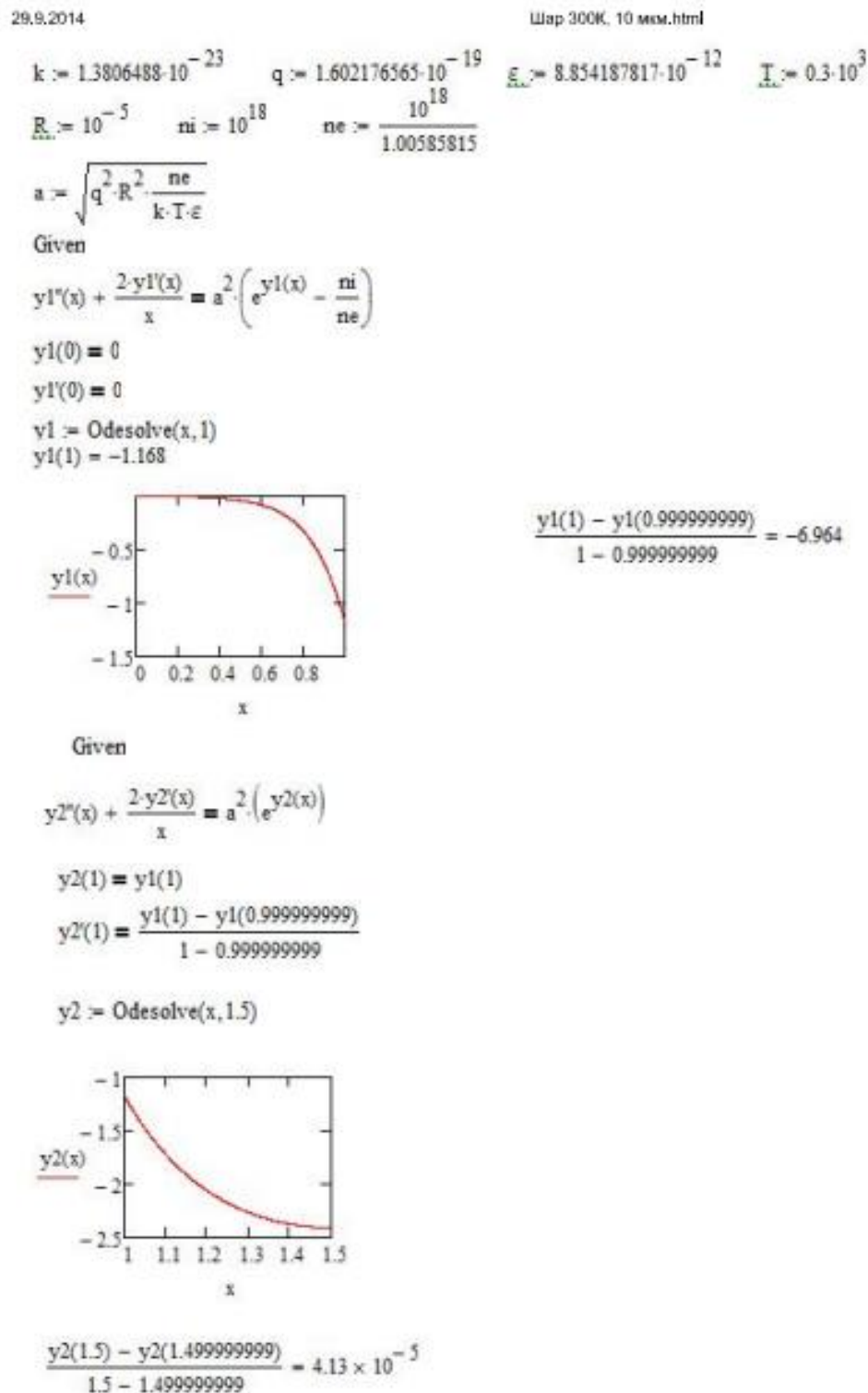


Рис. 7.1.

Практикум 8: Аналитическое решение уравнение Пуассона-Ферми-Дирака для равновесной пылевой плазмы.

Уравнение Пуассона-Ферми-Дирака

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \frac{\mu_0 \psi_1}{q} \right) + \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} (n_i - (1 + \psi_1)^{3/2} n_{e0}) = 0. \quad (8.1)$$

Умножим обе части этого уравнения на q / μ_0 , находим

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi_1}{dr} \right) + \frac{q^2}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0} (n_i - (1 + \psi_1)^{3/2} n_{e0}) = 0. \quad (8.2)$$

Введением безразмерного радиуса $x = \frac{r}{R}$ это уравнение приводится к

виду

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\psi_1}{dx} \right) + \frac{q^2 R^2}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0} (n_i - (1 + \psi_1)^{3/2} n_{e0}) = 0. \quad (8.3)$$

Введением безразмерной величины $\frac{n_i}{n_{e0}} = \bar{n}_i$ из (8.3) получим

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\psi_1}{dx} \right) + \frac{q^2 R^2}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0} n_{e0} \left(\bar{n}_i - (1 + \psi_1)^{3/2} \right) = 0.$$

Обозначим $a^2 = \frac{q^2 R^2 n_{e0}}{\mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}$. Тогда

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\psi_1}{dx} \right) - a^2 \left((1 + \psi_1)^{3/2} - \bar{n}_i \right) = 0. \quad (8.4)$$

Рассмотрим случай, когда $|\psi_1| \ll 1$. Разложим величину $(1 + \psi_1)^{3/2}$ в ряд и ограничимся первыми двумя членами:

$$(1 + \psi_1)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2} \psi_1. \quad (8.5)$$

С учетом этого выражения из (8.4) получим

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d\psi_1}{dx} \right) = a^2 \left(1 + \frac{3}{2} \psi_1 - \bar{n}_i \right). \quad (8.6)$$

Введем функцию $xy = W$, $1 + \frac{3}{2} \psi_1 - \bar{n}_i = y$. Тогда (8.6) приводится к виду

$$\frac{d^2 W}{dx^2} - a^2 W = 0. \quad (8.7)$$

Общим решением уравнения (8.7) является:

$$W = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}.$$

Тогда

$$\psi_1(x) = \frac{2}{3} \left(\bar{n}_i - 1 \right) + \frac{2}{3} \frac{C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}}{x}. \quad (8.8)$$

Выберем C_1 и C_2 с учетом условия

$$\psi_1(0) = 0. \quad (8.9)$$

Из (8.8) видно, что величина $\psi_1(0)$ будет ограниченной только, если функция

$$y(x) = \frac{2}{3} \frac{C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}}{x}$$

в точке $x = 0$ представляет неопределенность вида $0:0$. Следовательно,

$$\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} (C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}) = \frac{2}{3} (C_1 + C_2) = 0, \quad C_1 = -C_2.$$

Найдем значение $\psi_1(x)$ при $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi_1(x) = \frac{2}{3} \left(\bar{n}_i - 1 \right) + \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{C_1 (e^{ax} - e^{-ax})}{x} = \frac{2}{3} \left(\bar{n}_i - 1 + 2C_1 a \right).$$

Отсюда и из условия (8.9) находим:

$$\bar{n}_i = 1 - 2C_1 a, \quad (8.10)$$

$$C_1 = \frac{1 - \bar{n}_i}{2a}.$$

Таким образом,

$$\psi_1(x) = \frac{2}{3} \left(\bar{n}_i - 1 \right) + \frac{2}{3} \frac{C_1 (e^{ax} - e^{-ax})}{x} = \frac{2}{3} \left(\bar{n}_i - 1 \right) + \frac{1 - \bar{n}_i}{2ax} (e^{ax} - e^{-ax}). \quad (8.11)$$

Введем величину $\lambda = \frac{l}{R}$, где $2l$ - расстояние между двумя соседними частицами. В области $1 \leq x \leq \lambda$ ионы отсутствуют: $\bar{n}_i = 0$. Тогда формула (8.11) для случая $1 \leq x \leq \lambda$ имеет вид.

$$\psi_2(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax}}{x} - 1 \right). \quad (8.12)$$

Отсюда следует

$$\psi_2'(x) = \frac{2}{3} \frac{(D_1 a e^{ax} - D_2 a e^{-ax})x - (D_1 e^{ax} + D_2 e^{-ax})}{x^2}. \quad (8.13)$$

Одним из граничных условий для $\psi_2(x)$ является

$$\psi_2'(\lambda) = 0, \quad (8.14)$$

Из (8.13), (8.14) находим

$$\begin{aligned} \psi_2'(\lambda) &= \frac{2}{3} \frac{(D_1 a e^{a\lambda} - D_2 a e^{-a\lambda})\lambda - (D_1 e^{a\lambda} + D_2 e^{-a\lambda})}{\lambda^2}, \\ D_2 &= D_1 \frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} e^{2a\lambda}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Таким образом, распределение безразмерного потенциала в этой области описывается формулой

$$\psi_2(x) = \frac{2}{3} \left(D_1 \frac{e^{ax} + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - x)}}{x} - 1 \right). \quad (8.16)$$

При $x=1$ должны выполняться граничные условия:

$$\psi_1(1) = \psi_2(1), \quad \psi_1'(1) = \psi_2'(1). \quad (8.17)$$

Из (8.11) и (8.16) находим

$$\begin{aligned} \psi_1(1) &= \frac{2}{3} C_1 (e^a - e^{-a} - 2a), \quad \psi_2(1) = \frac{2}{3} \left(D_1 \left(e^a + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda-1)} \right) - 1 \right), \\ \psi_1'(1) &= \frac{2}{3} C_1 [e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)], \\ \psi_2'(1) &= \frac{2}{3} D_1 \left(e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda-1)}(a+1) \right), \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$C_1 = \frac{D_1 \left(e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda-1)}(a+1) \right)}{[e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)]},$$

$$D_1 = \frac{e^a(a-1) + e^{-a}(a+1)}{2a \left(e^a(a-1) - (a+1) \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda-1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{2a\lambda} \right)}, \quad (8.19)$$

$$C_1 = \frac{e^a(a-1) - \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda-1)}(a+1)}{2a \left(e^a(a-1) - (a+1) \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda-1)} + 1 + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{2a\lambda} \right)}. \quad (8.20)$$

Можно записать формулу для распределения концентрации электронов

$$n_e = n_{e0} \left(1 + \frac{2}{3} C_1 \left(\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{x} - 2ax \right) \right)^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8.21)$$

$$n_e = n_{e0} \left(\frac{2}{3} \left(D_1 \frac{e^{ax} + \left(\frac{a\lambda - 1}{a\lambda + 1} \right) e^{a(2\lambda - x)}}{x} + \frac{1}{2} \right) \right)^{3/2}, \quad 1 < x \leq \lambda. \quad (8.22)$$

На рис. 8.1 показан график распределения потенциала электрического поля по радиусу твердой частицы.

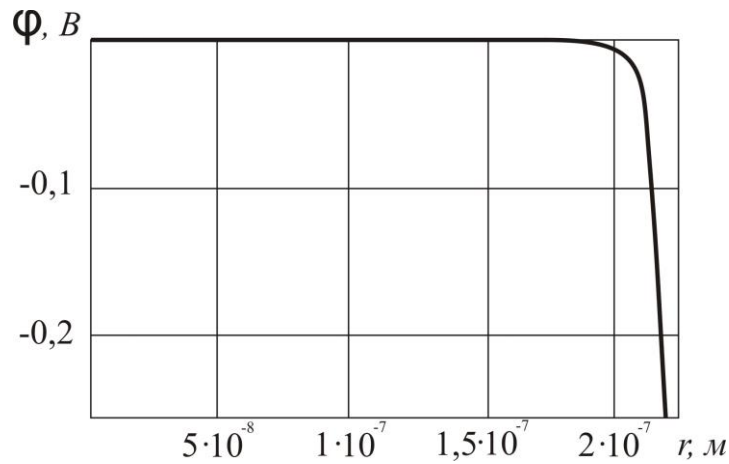


Рис. 8.1. Распределение потенциала в области $0 \leq r \leq R$

при $R = 22 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, $n_{e0} = 5 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$.

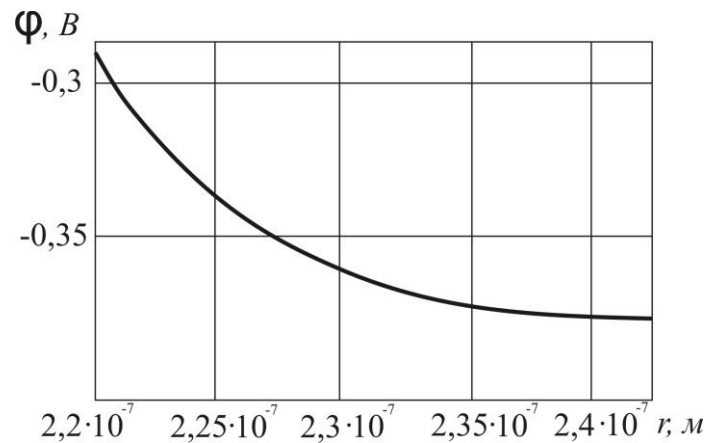


Рис. 8.2. Распределение потенциала в области $R < r \leq l$

при $R = 22 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, $n_{e0} = 5 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$.

Как видно из рис. 8.1, внутри частицы с ростом безразмерного радиуса x потенциал сначала уменьшается медленно, затем при приближении к поверхности частицы он уменьшается очень быстро. Это объясняется возникновением очень большого градиента концентрации электронов вблизи поверхности. Соответ-

венно возникает большая напряженность электрического поля. На рис. 8.3 и 8.4 показаны графики распределений концентрации электронов рассчитанные по формулам 3.73 и 3.74. Как видно из этих рисунков, основная часть заряда находится у поверхности частицы, то есть пылевая частица окружена довольно плотным электронным облаком.

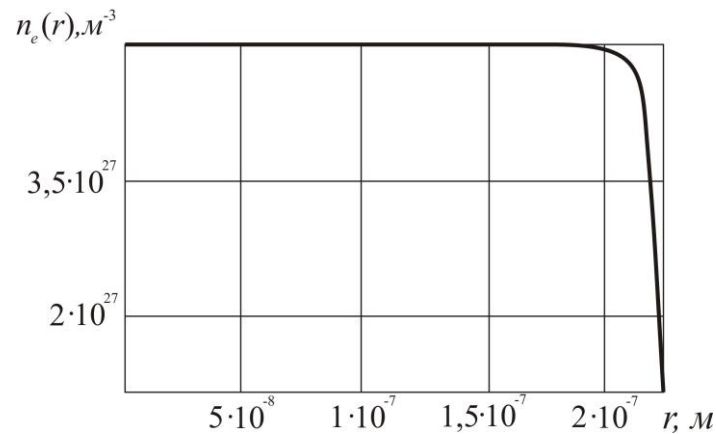


Рис. 8.3. Распределение концентрации электронов в области $0 \leq r \leq R$

при $R = 22 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, $n_{e0} = 5 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$.

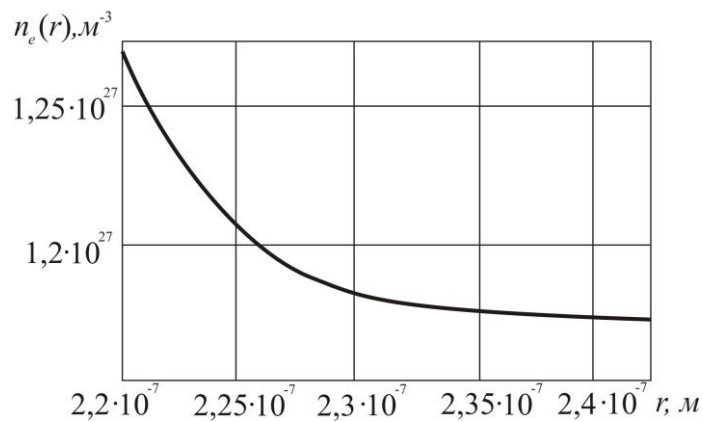


Рис. 8.4. Распределение концентрации электронов в области $R < r \leq l$

при $R = 22 \cdot 10^{-8} \text{ м}$, $n_{e0} = 5 \cdot 10^{27} \text{ м}^{-3}$.

Основная литература:

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978, 512 с.
2. Вычислительные методы в физике плазмы / Под редакцией Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга – М.: Мир, 1974, 514 с.
3. Численные методы в физике плазмы / Под редакцией А.А. Самарского – М.: Наука, 1977, 264 с.
4. Березин Ю.А., Вшивков В.А. Метод частиц в динамике разреженной плазмы. – Новосибирск: Наука, 180, 96 с.
5. Низкотемпературная плазма / гл. редактор серии М.Ф. Жуков / т.11. Математическое моделирование катодных процессов – Новосибирск: Наука, 1993, 194 с.

Учебное издание

Файушин Ильназ Изаилович

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ
ПЛАЗМЫ Часть 1. Моделирование процессов в равновесной пылевой
плазме**